

LEBDIS

We know

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**SĂ ÎNVĂȚĂM
MATEMATICĂ
FĂRĂ PROFESOR
CLASA A XI – A
PROFIL ȘTIINȚE ALE NATURII**

**EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2022**

CUPRINS

	Enunțuri Rezolvări	
1. Elemente de calcul matriceal și sisteme de		
ecuații liniare	5	148
1.1 Matrice	5	148
1.2 Determinanți	21	151
1.2.1 Determinantul unei matrice pătratice de		
ordin cel mult 3, proprietăți	21	151
1.2.2 Aplicațiile determinanților în geometria		
plană: ecuația unei drepte determinată de două		
puncte distincte, aria unui triunghi și coliniari-		
tatea a trei puncte în plan	30	154
1.3 Sisteme de ecuații liniare	34	155
1.3.1 Matrice inversabile $M_n(C), n = 2,3$.		
Ecuatii matriceale	34	155
1.3.2 Sisteme liniare cu cel mult 3 necunos-		
cute. Forma matriceală a unui sistem. Metode de		
rezolvare a sistemelor liniare: metoda lui Cramer		
metoda lui Gauss	39	157
1.4 Teste grilă de autoevaluare	46	159
Testul 1	46	159
Testul 2	47	160
Testul 3	48	161
Testul 4	49	161
Testul 5	50	162
Testul 6	51	163
2. Limite de funcții	52	164
2.1 Noțiuni elementare despre mulțimi de		
puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire,		
vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile $+\infty$ și		
$-\infty$	52	164
2.2 Limita unei funcții într-un punct, limite		
laterale. Operații cu limite de funcții	59	165
2.3 Limitele funcțiilor elementare	65	165

2.4	Asimptotele funcțiilor reale	80	170
2.5	Teste grilă de autoevaluare	85	171
	Testul 1	85	171
	Testul 2	86	172
	Testul 3	87	173
	Testul 4	88	174
	Testul 5	89	175
3.	Funcții continue	90	176
	3.1 Continuitatea unei funcții. Operații cu funcții continue	90	176
	3.2 Proprietăți ale funcțiilor continue	99	179
	3.3 Teste grilă de autoevaluare	103	181
	Testul 1	103	181
	Testul 2	104	181
4.	Funcții derivabile	105	182
	4.1 Tangenta la o curbă. Derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile	105	182
	4.2 Derivatele unor funcții uzuale. Operații cu funcții care admit derivată. Derivarea funcțiilor compuse	113	185
	4.3 Regulile lui l'Hospital	123	186
	4.4 Teste grilă de autoevaluare	128	188
	Testul 1	128	188
	Testul 2	129	190
	Testul 3	130	190
5.	Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor	131	191
	5.1 Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor	131	191
	5.2 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	136	194
	5.3 Reprezentarea grafică a funcțiilor	139	195
	5.4 Teste grilă de autoevaluare	147	196
	Testul 1	147	196

1. Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare

1.1 Matrice

a) Noțiuni teoretice și exemple

Noțiunea de matrice

Definiție. Numim matrice de tipul (m, n) cu elemente numere complexe, o funcție $A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{C}$.

Notăm $A(i, j) = a_{i,j}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ și ele se numesc **elementele** matricei.

Notăm $M_{m,n}(\mathbf{C})$ mulțimea matricelor de m linii și n coloane cu coeficienți în \mathbf{C} .

Notăm $M_n(\mathbf{C})$ mulțimea matricelor de n linii și n coloane cu coeficienți în \mathbf{C} .

Exemple. a) Pentru $m = n = 2$ avem: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

b) Pentru $m = 3, n = 1$ obținem matricea coloană $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$.

c) Pentru $m = 1, n = 2$ obținem matricea linie $A = (a_{11} \ a_{12})$.

Egalitatea matricelor

Definiție. Două matrice $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ sunt egale dacă are loc egalitatea $a_{ij} = b_{ij}$, $(\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\}$ și $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplu. Matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x+1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ sunt egale dacă: $1 = x, x = 1, x + 1 = 2, 3 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Operații cu matrice

1) Adunarea matricelor

Definiție. Fiind date $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$, numim suma matricelor A și B , matricea C ale cărei elemente sunt date de egalitățile $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\}$ și $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Proprietăți ale adunării matricelor

a) Comutativitatea - $A + B = B + A$ $(\forall) A, B \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.

b) Asociativitatea: $(A + B) + C = A + (B + C)$ $(\forall) A, B, C \in M_{m,n}(\mathbf{C})$.

c) Elementul neutru - este matricea nulă O_{mn} deoarece:

$$A + O_{mn} = O_{mn} + A = A, (\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C}).$$

d) Element invers - $(\forall) A \in M_{n,n}(\mathbb{C}), (\exists) A' = -A$ astfel încât $A + A' = A' + A = O_{mn}$. Matricea A' se numește opusa matricei A .

2) Înmulțirea cu scalari a matricelor

Definiție. Fiind dată matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\alpha \in \mathbb{C}$ numim produsul dintre numărul α și matricea A , matricea B , ale cărei elemente sunt date de egalitățile $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} (\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\}$ și $(\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemple. a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, atunci $6 \cdot A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 & 6 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 & 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale înmulțirii cu scalari

- a) $1 \cdot A = A, (\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.
- b) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)A, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.
- c) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.
- d) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, (\forall) \alpha \in \mathbb{C}, A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

3) Înmulțirea matricelor

Definiție. Fiind date $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, numim produsul matricelor A și B , matricea C ale cărei elemente sunt date de

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \quad (\forall) i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ și } (\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Exemplu. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, atunci: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale înmulțirii matricelor

- a) Asociativitatea: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) (\forall) A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.
- b) Elementul neutru în $M_n(\mathbb{C})$ este matricea unitate I_n deoa-

rece: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, (\forall) A \in M_n(\mathbb{C})$, unde $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Distributivitatea la stânga a înmulțirii față de adunarea matricelor: $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B, C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ atunci are loc egalitatea: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Transpusa unei matrice

Definiție. Fiind dată matricea $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, numim transpusa matricei A , matricea notată ${}^tA = (b_{kl}) \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, unde $b_{kl} = a_{lk}$, $(\forall) k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $(\forall) l \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Exemplu. Fiind dată $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, atunci transpusa matricei A este matricea ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale operației de transpunere

- a) $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, avem: ${}^t({}^tA) = A$.
 b) $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $(\forall) a \in \mathbb{C}$, avem: ${}^t(a \cdot A) = a \cdot {}^tA$.
 c) $(\forall) A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ avem ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
 d) $(\forall) A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $(\forall) B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, are loc relația:
 ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

b) Probleme rezolvate

1. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculați:
 $A + B$; $A - 2B$; $B \cdot A$.

Soluție. a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+1 \\ 3+2 & 7+5 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.
 $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 7 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 7 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 17 & 31 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Calculați:

- a) $A + B + C$ b) $A + B - C$ d) ABC .

Soluție. a) $A + B + C = \begin{pmatrix} 1+3-1 & -2+1-3 \\ 3+2+10 & 7+5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}.$

b) $A + B - C = \begin{pmatrix} 1+3+1 & -2+1+3 \\ 3+2-10 & 7+5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$

c) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 \\ 3 \cdot 3 + 7 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 23 & 38 \end{pmatrix}.$

$ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 23 & 38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -89 & -78 \\ 357 & 273 \end{pmatrix}.$

3. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați:

- a) $AB + BA$ b) $AB - BA$.

Soluție. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$ și

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$

a) $AB + BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 19 & 23 \end{pmatrix}.$

b) $AB - BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

4. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați:

- a) A^2 b) B^2 .

Soluție. a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$

a) $B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

5. Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

și funcția $f(x) = X^2 + 2X + 4I_2$. Calculați:

- a) $f(A)$ b) $f(B)$ c) $f(AB)$.

Soluție. Avem: $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$;

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } f(A) = A^2 + 2A + 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } f(B) = B^2 + 2B + 4I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } f(AB) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Determină matricea X astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$3X + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluție. $3X + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

7. Rezolvați sistemul matriceal:
$$\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soluție. Folosim metoda reducerii. Adunând membru cu membru cele două ecuații obținem: $(X + 2Y) + (X - 2Y) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \text{ sau } 2X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Scăzând membru cu membru cele două ecuații obținem:

$$(X + 2Y) - (X - 2Y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

8. Rezolvați sistemul matriceal:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Soluție. Folosim metoda reducerii. Scăzând membru cu membru cele două ecuații obținem: $(X + Y) - (X - 2Y) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1-1 & 3-0 & 5-(-1) \\ -2-1 & 0 & 4-(-5) \\ 2-2 & 0-(-3) & 0-3 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow 3Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Determină $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\begin{pmatrix} x+1 & y+2 \\ 2x-1 & 3y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x & 2y \end{pmatrix}.$$

Soluție. Folosind egalitatea matricelor obținem simultan:

$$x + 1 = 2; y + 2 = 3; 2x - 1 = x; 3y - 1 = 2y \Rightarrow x = 1; y = 1; x = 1; y = 1 \Rightarrow x = 1; y = 1.$$

10. Determină matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. După înmulțirea matricelor obținem egalitatea:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix} \Rightarrow a+c = a-b; \\ b+d = a+b; -a+c = c-d; -b+d = c+d \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow b = -c \text{ și } a = d. \text{ Dacă notăm: } a = d = x \text{ și } b = -c = y \Rightarrow \\ \Rightarrow a = x, b = y, c = -y, d = x \text{ și matricea este: } \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R}.$$

LIBRIS | We know books

11. Se consideră matricele A, B astfel încât:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } 2 \cdot A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculează produsul $A \cdot B$.

Soluție. Se rezolvă sistemul și se obține soluția: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$.

Demonstrăm prin inducție matematică că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Într-adevăr $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$.

Demonstrăm prin inducție matematică că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Într-adevăr $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstrăm prin inducție matematică că $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Într-adevăr $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$.

Demonstrăm prin inducție matematică că $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ și demonstrăm că:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\text{Într-adevăr}} A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

16. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Demonstrăm prin inducție matematică că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și demonstrăm că $A^{n+1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \hat{\text{Într-adevăr}} A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ și $A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$.

Demonstrăm prin inducție matematică că $A^{2n} = I_2$ și $A^{2n+1} = A$.

a) Presupunem că $A^{2n} = I_2$ și demonstrăm că $A^{2(n+1)} = I_2$.

$$\hat{\text{Într-adevăr}} A^{2(n+1)} = A^{2n+2} = A^{2n} \cdot A^2 = I_2 \cdot I_2 = I_2.$$

b) Presupunem că $A^{2n+1} = A$ și demonstrăm că $A^{2n+3} = A$.

$$\hat{\text{Într-adevăr}} A^{2n+3} = A^{2n+1} \cdot A^2 = A \cdot I_2 = A.$$

18. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluție. Avem: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Demonstrăm prin inducție matematică că

$A^n = A$. Presupunem că $A^n = A$ și vom demonstra că $A^{n+1} = A$.

Într-adevăr $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A$.

19. Determinați puterea n a matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluție. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}.$$

Demonstrăm că: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ și vom demonstra că

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr $A^{n+1} = A^n \cdot A =$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

21. Fie matricea $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

Arătați că $A_{a+b} = A_a \cdot A_b$ (\forall) $a, b \in \mathbf{R}$.

Soluție. Avem: $A_a \cdot A_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= A_{a+b}.$$

22. Fie matricile: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculați $A^n, B^n, (A+B)^n$ pentru $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Soluție. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$, iar prin inducție se arată că $A^n = A$.

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$, iar prin inducție se arată că $B^n = B$.

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 =$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) =$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$, iar prin inducție se arată
 că $(A+B)^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

23. Fie matricile: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculați A^2 și arătați că $A^2 = A + 2I$.

Soluție. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$.

24. Determinați puterea n a matricii $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluție. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
 $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.